Revue des sciences de l'éducation

Le comptage et la cardinalité, deux apprentissages de longue haleine qui évoluent en interaction

Catherine Van Nieuwenhoven

Volume 22, numéro 2, 1996

Les apprentissages mathématiques en situation

URI : https://id.erudit.org/iderudit/031882ar
DOI : https://doi.org/10.7202/031882ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Van Nieuwenhoven, C. (1996). Le comptage et la cardinalité, deux apprentissages de longue haleine qui évoluent en interaction. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 295–320. https://doi.org/10.7202/031882ar

Résumé de l'article

Le comptage est une activité dirigée vers un but étroitement lié au concept de cardinalité. Les concepts de comptage et de la cardinalité sont définis respectivement en relation avec les travaux de Gelman et Gallistel (1978) et de Sophian (1987, 1988, 1991). Les données ont été recueillies auprès de 94 enfants de 5 à 8 ans à l'aide d'épreuves de comptage et de cardinalité. Les résultats montrent que l'acquisition des principes relatifs au comptage et de la cardinalité est un processus lent et progressif.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXII, n° 2, 1996, p. 295 à 320

Le comptage et la cardinalité, deux apprentissages de longue haleine qui évoluent en interaction

Catherine Van Nieuwenhoven
Aspirante au Fonds national de recherche scientifique belge
Université Catholique de Louvain

Résumé – Le comptage est une activité dirigée vers un but étroitement lié au concept de cardinalité. Les concepts de comptage et de la cardinalité sont définis respectivement en relation avec les travaux de Gelman et Gallistel (1978) et de Sophian (1987, 1988, 1991). Les données ont été recueillies auprès de 94 enfants de 5 à 8 ans à l'aide d'épreuves de comptage et de cardinalité. Les résultats montrent que l'acquisition des principes relatifs au comptage et de la cardinalité est un processus lent et progressif.

Introduction

Le comptage est à l'évidence une activité transmise socialement. Selon les différentes cultures, les procédures de comptage sont variées. Malgré cela, le comptage ne peut être considéré comme une activité mécanique dénuée de sens.

> C'est une activité dirigée vers un but, et ce but est étroitement lié au concept de cardinalité: nous comptons pour savoir combien d'objets il y a dans une collection, pour comparer une collection à une autre, ou pour construire une collection composée d'une quantité déterminée d'objets (Sophian, 1991, p. 50).

L'orientation vers un but, qualité d'un comptage élaboré est une construction liée au développement cognitif (Sophian, 1991). Au départ, les jeunes enfants comptent pour interagir avec d'autres, pour participer à la vie sociale. Ils n'accordent pas nécessairement des propriétés cardinales à leur comptage. De plus, les enfants utilisent les nombres dans des contextes variés où ils n'ont plus aucune relation avec leur signification cardinale. Fuson (1988, 1991) parle, à ce sujet, des sept contextes dans lesquels les enfants rencontrent les mots-nombres. Trois de ces contextes sont mathématiques: le contexte cardinal où le mot-nombre fait référence à la totalité d'un ensemble d'entités discrètes en indiquant de combien d'éléments il est composé; le contexte ordinal où le mot-nombre renvoie à un élément d'une collection d'éléments ordonnés et décrit la position relative de cet élément, et le contexte de mesure où le mot-nombre renvoie à une quantité continue et indique combien d'unités lui correspondent. Deux autres contextes, celui de la séquence et celui du comptage, apportent des outils culturels qui garantissent la justesse du mot-nombre à utiliser dans les contextes cardinal, ordinal et de mesure. Enfin, les deux derniers contextes sont le contexte symbolique de la lecture des mots-nombres et les contextes non numériques (ou quasi numériques) de rencontre du nombre (Fuson, 1991).

Les différentes significations des mots-nombres sont tout d'abord indépendantes les unes des autres. Puis, progressivement, les enfants établissent des relations entre les significations si bien que l'énonciation d'un seul mot-nombre recouvre alors plus d'une signification.

L'apprentissage de toutes ces relations exige du temps, de deux à huit ans chez la plupart des enfants. L'enfant va donc découvrir que compter est un des usages du nombre qui, en fait, revêt une signification cardinale importante. Nous allons tenter d'évaluer les stratégies de comptage des enfants et leur première compréhension cardinale des nombres.

L'évaluation du comptage

Dans la mesure où ils s'intéressaient principalement au développement conceptuel, Piaget et Széminska (1941) ont porté peu d'intérêt aux procédures de comptage des enfants. Selon leurs perspectives, le comptage jouait un rôle réduit dans le développement des conceptualisations relatives au nombre. Des travaux récents ont, en revanche, mis l'accent sur le comptage, le considérant à la fois comme un indicateur de la richesse des connaissances mathématiques dès la petite enfance (Fuson, 1988; Gelman et Gallistel, 1978) et comme un facteur potentiellement important du développement des conceptualisations numériques (Gelman, 1982; Klahr, 1984; Sophian, 1991). En effet, Fuson (1988) a centré ses recherches sur la nature de la compréhension manifestée par les enfants lors de situations numériques trop importantes pour être traitées perceptivement, c'est-à-dire celles où le nombre dépasse 6. Pour elle, contrairement à Piaget, le comptage joue un rôle important dans la construction du nombre. Cependant, en accord avec la thèse piagétienne, elle estime que le comptage à lui seul ne suffit pas à fonder une compréhension pertinente du nombre. Le comptage sera abordé comme une compétence mathématique précoce et nécessaire à l'enfant pour appréhender et comprendre les problèmes qu'il rencontre.

Ce sont Gelman et Gallistel (1978) qui, les premiers, ont défini le comptage comme un mécanisme d'appréhension du nombre qui repose sur la maîtrise de cinq principes qui sont:

1) le principe d'ordre stable (*stable ordering*) selon lequel les mots-nombres doivent constituer une séquence stable;

2) le principe de correspondance terme à terme (*one-to-one principle*) selon lequel à chaque élément compté correspond un et un seul mot-nombre;

3) le principe cardinal (*cardinal principle*) selon lequel le dernier mot-nombre utilisé dans une séquence de comptage représente le nombre d'éléments de l'ensemble compté;

4) le principe d'abstraction (*abstraction principle*) selon lequel l'ensemble sur lequel porte le comptage peut être constitué d'éléments hétérogènes tous pris comme unité;

5) le principe de non-pertinence de l'ordre (*order irrelevance principle*) selon lequel le comptage des éléments peut se faire dans n'importe quel ordre, pour autant que les autres principes soient respectés (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995).

Les trois premiers principes définissent la procédure de comptage. Le quatrième détermine le type d'ensemble sur lequel peut porter le comptage. Quant au cinquième principe, il permet de distinguer le comptage du simple étiquetage (Gelman et Meck, 1983). Selon Gelman, le tout jeune enfant possède une connaissance implicite de ces cinq principes. Ceux-ci constitueraient des compétences préformées qui guideraient les performances de l'enfant. Dès lors, le développement du comptage consiste dans l'articulation des principes entre eux et dans leur application à des situations de plus en plus complexes.

Par la suite, Fuson (1991) a défini le comptage comme «un instrument culturel utilisé par l'enfant pour construire les concepts de nombre cardinal, ordinal et nombre de mesure, lorsqu'il s'agit de collections de taille moyenne» (p. 166).

Brissiaud (1989) différencie le comptage-numérotage du dénombrement qu'il définit comme un niveau de comptage nettement plus fouillé. À un tel degré, l'enfant dénombre une collection d'objets et comprend que le dernier mot-nombre qu'il prononce n'est pas un simple numéro, mais représente à lui seul la quantité de tous les objets. Il doit accorder une double signification au dernier mot-nombre prononcé: lorsqu'il est prononcé, au cours du comptage, le dernier mot-nombre a le même statut que tous les autres mots-nombres. Il s'agit d'un numéro qui distingue un objet (le «7», par exemple). L'enfant doit alors changer la signification de ce mot-nombre pour qu'il représente la quantité de tous les objets: il passe de «le 7» à «les 7».

0	0	0	0	0	0	0
le un	le deux	le trois	le quatre	le cinq	le six	le sept
«les sept»						

Figure 1 – La double signification du dernier mot-nombre prononcé lors d'un comptage

Pour pouvoir dénombrer correctement un ensemble d'éléments, l'enfant doit avoir acquis les principes du comptage et être capable de les coordonner (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995). Par conséquent, évaluer la maîtrise du comptage suppose l'évaluation de l'acquisition des cinq principes, qui sont autant de capacités qui s'intègrent au sein de la procédure de comptage. Précisons brièvement ces différents principes et les épreuves qui permettent d'en évaluer la maîtrise.

Le principe d'ordre stable

Selon Gelman et Gallistel (1978), le principe d'ordre stable (*stable ordering*) demande au minimum que l'enfant connaisse une liste non sécable de mots-nombres plus ou moins longue. Les chercheurs constatent que, dès 2-3 ans, de nombreux enfants connaissent une séquence de mots-nombres qui comporte souvent des erreurs, mais qui a la particularité d'être stable au travers de différentes récitations. Toutefois, le respect d'un ordre stable n'est pas suffisant pour permettre un comptage correct. La définition du principe d'ordre stable doit donc être précisée puisqu'il est indispensable que cet ordre stable soit celui de la suite conventionnelle des mots-nombres.

À partir de deux ans et demi environ, la suite standard des mots-nombres va progressivement être mémorisée. Comme le fait remarquer Fischer (1992), cette première connaissance de la chaîne numérique est de nature déclarative. Par la suite, l'enfant va découvrir les règles qui régissent la suite des mots-nombres. Il pourra alors appliquer ces règles pour continuer la chaîne numérique. Celle-ci se transforme ainsi en une connaissance procédurale. Fuson (1991) a étudié l'évolution de la connaissance de la chaîne verbale. Quatre niveaux de connaissances y sont distingués.

Le chapelet – À ce premier niveau, les mots-nombres ne sont pas différenciés au sein de la suite. Il s'agit d'une récitation numérique sans signification, 1-2-3-4-5-6, etc. Les enfants ne semblent pas réaliser que cette séquence est composée de plusieurs mots. En outre, pour produire un mot-nombre particulier, les enfants doivent réciter l'ensemble de la séquence.

La chaîne non sécable – À ce deuxième niveau, les mots-nombres sont différenciés. Une chaîne insécable est une structure globale qui ne peut être produite qu'à partir du début de la séquence. Elle ne peut donc pas être brisée ni débuter à un point d'entrée arbitraire.

La chaîne sécable – À ce troisième niveau, le comptage peut commencer à partir de n'importe quel mot-nombre de la séquence. La chaîne sécable est une chaîne de liens connectés qui peut être entamée à n'importe quel point d'entrée (mot-nombre); ces points peuvent donc être arbitraires. De plus, les enfants sont capables de donner le nombre qui suit un mot-nombre donné.

La chaîne dénombrable – À ce quatrième niveau, la signification de la suite du comptage et de la cardinalité fusionnent. Les mots-nombres sont énoncés à partir de celui qui représente le premier terme (ou le terme retenu par l'enfant pour être le premier) et permet à l'enfant de compter N éléments à partir de X (en plus ou en moins).

Pour pouvoir dénombrer un ensemble, la connaissance de la liste non sécable est suffisante. Toutefois, la prise en compte des autres niveaux de connaissance de la chaîne verbale n'est pas sans intérêt. Il est, en effet, évident que, lors de l'apprentissage des opérations d'addition et de soustraction, la connaissance de la chaîne sécable puis de la chaîne dénombrable est un atout.

Le principe de correspondance terme à terme

Le principe de correspondance terme à terme (*one-to-one principle*) précise que l'enfant doit faire correspondre un seul mot-nombre à chaque élément de l'ensemble à dénombrer. L'usage correct du principe de correspondance terme à terme ne nécessite pas que les éléments comptés le soient dans un ordre particulier. Il requiert seulement qu'à chaque élément ne soit assigné qu'un seul mot-nombre (Gelman et Meck, 1991). Cependant, la connaissance du principe de correspondance terme à terme est rapidement coordonnée avec celle de la liste conventionnelle des mots-nombres (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995).

Le principe cardinal

Gelman et Gallistel (1978) évaluent ce principe en posant tout simplement à l'enfant la question «Combien y a-t-il de X?» à la fin de son comptage. De nombreux auteurs ont vivement critiqué le mode d'évaluation du principe cardinal (*cardinal principle*) adopté par Gelman et ses collaborateurs. Ainsi, Fuson, Pergament et Lyons (1985) font remarquer que la répétition du dernier mot-nombre, pour désigner le cardinal d'un ensemble, n'est pas nécessairement liée à une compréhension effective de la notion de cardinal. Pour de nombreux enfants, il semble, en effet, que, au départ, ce type de réponse soit «seulement une règle concernant la réponse à la question combien plutôt qu'une règle cardinale» (*Ibid.*, p. 1435).

De même, Frye, Braisby, Lowe, Maroudas et Nicholls (1989), ont émis l'hypothèse que, si les enfants apprennent la règle du dernier mot prononcé parce qu'elle leur permet une réponse satisfaisante à la question «Combien?», il se peut qu'ils ne comprennent pas d'autres questions qui portent, elles aussi, sur la quantité, mais dont la forme est différente, et qu'ils répondent alors de façon erronée. Et, en effet, ils observent qu'une question énoncée sous la forme «Combien?» est plus facile qu'une autre énoncée sous la forme «Y a-t-il N objets dans cet ensemble?» qui, à son tour, est plus aisée que «Donne-moi N objets». L'effet de la formulation des questions relatives à la cardinalité fait l'objet d'une évaluation dans cette recherche. Évaluer la connaissance de la règle du dernier mot-nombre n'est cependant pas sans intérêt. Il s'agit d'une étape dans la maîtrise du comptage qui précède la compréhension de la cardinalité. Mais il ne faut pas confondre la connaissance de cette règle avec la compréhension du concept de cardinal. Cette compréhension est en fait beaucoup plus tardive. Par conséquent, nous retenons que les épreuves, construites sur base de la question «Combien y a-t-il de?», n'évaluent pas le principe cardinal, mais celui du dernier mot-nombre qui est une connaissance empirique que Gréco (1962) appelle la quotité.

Le principe de non-pertinence de l'ordre

Ce principe (*order irrelevance principle*) considère que l'ordre dans lequel les éléments d'une collection sont énumérés n'affecte pas le résultat du comptage. L'évaluation de ce principe peut poser problème dans la mesure où le nombre de situations est potentiellement infini si deux modifications sont combinées: l'ordre et la configuration spatiale de la collection. En revanche, si seul l'ordre est changé, le nombre de possibilités se limite strictement au nombre d'éléments comptés; chacun des éléments peut, à son tour, être le premier élément compté. Dans le premier cas, on court alors le risque de généraliser abusivement les résultats recueillis dans une situation particulière. La traduction de ce principe en une épreuve d'évaluation ne peut donc éviter une part d'arbitraire (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995).

Le principe d'abstraction

Le principe d'abstraction (*abstraction principle*) demande, lorsqu'on dénombre un ensemble fini d'éléments, que l'on considère tous ces éléments comme des unités équivalentes. L'enfant doit donc faire abstraction des qualités sensibles des objets susceptibles de les différencier les uns des autres et de poser problème à leur intégration au sein d'un même ensemble.

À ce sujet, Baroody (1991) fait référence à des recherches qui «montrent que, avant l'école, les enfants comptent volontiers des collections composées d'éléments divers et qu'ils ne comptent pas moins bien ces collections que celles qui sont composées d'objets identiques» (p. 148). Sa compréhension précoce n'empêche pas que le principe d'abstraction puisse poser problème par la suite. Lorsqu'un objet possède certaines qualités qui le distinguent trop des autres éléments de l'ensemble auquel il appartient, l'enfant répugne parfois à le compter (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995).

L'évaluation de la cardinalité

Il existe autant de problèmes théoriques engagés dans le développement du comptage que dans l'étude de concepts numériques tels que la cardinalité. Dans divers domaines de recherches, différentes définitions de la cardinalité et différentes méthodes d'étude ont été utilisées. Piaget s'est, quant à lui, centré sur la définition mathématique classique de la cardinalité en termes de correspondance. Deux collections sont de cardinal identique si, et seulement si, leurs éléments peuvent être mis en correspondance terme à terme. En parallèle avec ses recherches sur la conservation, «il ne crédite pas les enfants de la compréhension de la cardinalité avant qu'ils n'aient compris que l'équivalence entre deux collections reste inchangée lorsque leur correspondance perceptive est rompue par la dispersion ou le resserrement de l'une des collections» (Sophian, 1991). Dans notre recherche, nous nous sommes davantage centrés sur les correspondances entre les collections sans prendre en compte les transformations.

D'une part, l'attention est mise sur les capacités qu'ont les enfants d'utiliser le comptage, ou même la suite numérique, pour raisonner à propos des équivalences entre les collections. Nous nous baserons essentiellement sur l'ensemble des recherches menées par Sophian (1987, 1988, 1991). En effet, Sophian étudie la compréhension du comptage par les jeunes enfants en tant que source d'information numérique susceptible d'être utilisée pour raisonner sur les relations entre deux collections. Ses études abordent la question des relations entre comptage et cardinalité en examinant les aspects cardinaux du comptage chez l'enfant.

D'autre part, l'intérêt portera également sur les recherches qui abordent l'évaluation de la cardinalité, par le biais du comptage, à partir d'une seule collection de référence. Ceci consiste à évaluer si les enfants réalisent, lorqu'ils effectuent un comptage d'une collection d'objets, que le dernier mot-nombre cité représente le nombre d'objets présents dans la collection, autrement dit, s'il détermine sa «numérosité». L'enfant doit percevoir que le dernier mot-nombre prononcé est spécial; c'est le résultat obtenu par le comptage qui conduit à déterminer le cardinal de la collection. En effet, très précocement, les enfants accentuent le dernier mot-nombre prononcé (Fuson, 1988; Gelman et Gallistel, 1978). Gelman et Gallistel ont interprété ce résultat en disant que les enfants comprennent très tôt que l'on peut obtenir, par le comptage, de l'information à propos de la valeur cardinale d'une collection.

Une autre interprétation pourrait être que les enfants apprennent à insister sur le dernier mot-nombre. Selon Sophian (1991), les enfants apprennent «le statut spécial du dernier mot-nombre par la voie de la procédure: ils acceptent ce statut avant de posséder les bases logiques qui leur permettent de le conceptualiser» (p. 52). D'autres recherches appuient cette hypothèse d'une origine procédurale au statut spécial du dernier mot-nombre (Frye *et al.*, 1989; Fuson, 1988; Fuson et Hall, 1983; Fuson *et al.*, 1985; Gelman et Meck, 1983; Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995; Wynn, 1992). Celles-ci portent essentiellement sur les réponses données par les enfants à des questions relatives au nombre d'objets d'une collection qu'ils viennent de compter. Fuson *et al.* (1985) font remarquer que la répétition du dernier mot-nombre pour désigner le cardinal d'un ensemble n'est pas nécessairement liée à une compréhension effective de la notion de cardinal. Pour de nombreux enfants, en effet, il semble que, au départ, ce type de réponse soit «seulement une règle concernant la réponse à la question "combien de" plutôt qu'une règle cardinale» (*Ibid.*, p. 1435).

Deux aspects de la cardinalité sont donc développés en lien avec le comptage. Toutefois, l'ensemble des évaluations réalisées dans le cadre de cette étude renvoie au champ important de recherche relatif à ce que Jonnaert (1994) appelle l'évaluation de surface de la cardinalité. En effet, une simple reconnaissance de la propriété numérique d'une collection ou la reconnaissance de l'équivalence de deux collections (comparaison et construction) ne donne aucun élément de réponse concernant la maîtrise réelle par les enfants des structures profondes du nombre, à savoir hiérarchiques, additives et multiplicatives. Une telle évaluation n'a pas encore été réalisée à ce jour.

Méthodologie

Questions de recherche

Nos questions de recherche peuvent se résumer comme suit:

1) Quelles sont les performances des enfants aux épreuves de comptage? Y a-t-il une progression entre les différentes passations?

2) Quelles sont les performances des enfants aux épreuves de cardinalité? Y a-t-il une progression entre les différentes passations?

3) Le comptage est-il une stratégie utilisée pour résoudre les épreuves de cardinalité?

Échantillon

Afin de suivre l'évolution de la maîtrise du comptage et de la cardinalité chez les enfants, nous avons conduit, sur deux ans, une recherche longitudinale. Les enfants ont été testés une première fois au début de la troisième année maternelle, c'est-à-dire avant d'avoir été confrontés à un apprentissage systématique dans le domaine des mathématiques. Ensuite, ils ont été testés en fin d'année, au début de la première primaire et, enfin, à la fin de la première primaire. L'échantillon de recherche est dit occasionnel simple, c'est-à-dire qu'il est dicté par le critère d'accessibilité et porte sur l'ensemble des sujets sans que ceux-ci soient divisés en sous-groupes. Les enfants sont issus de trois écoles qui portent les caractéristiques suivantes: il s'agit d'écoles avec peu d'enfants immigrés, le langage pouvant être une variable importante qui entrave la compréhension des consignes. Les pédagogies en œuvre dans ces trois écoles sont variées: une école développe une pédagogie active; une autre présente une pédagogie relativement traditionnelle et une autre encore travaille par cycle (enfants de 5 à 8 ans rassemblés). Ces différentes pédagogies n'ont toutefois pas été contrôlées.

L'échantillon est de 94 enfants pour les épreuves de comptage, répartis équitablement entre les trois écoles quant au nombre et au sexe. Parmi eux, 75 ont également été soumis aux épreuves de cardinalité. L'ensemble de l'échantillon n'a pas été retenu pour les épreuves de cardinalité pour une raison de faisabilité.

Les épreuves de comptage

Ces épreuves sont classées en cinq sections qui correspondent aux cinq principes de Gelman et Gallistel (1978). Dans cet article, nous ne prenons en compte que les épreuves de comptage qui demandent une production de la part de l'enfant. La majorité des épreuves comprennent plusieurs tâches.

Deux ensembles de bouchons ont été utilisés comme stimuli: l'un est constitué de 12 bouchons en plastique transparent; l'autre, de 6 bouchons en plastique bleu. Huit objets différents ont été utilisés comme matériel additionnel: un crayon, une allumette, une fourchette, une feuille de papier A4, une latte de 30 centimètres, un livre de poche, un anneau et un gant de toilette.

Le principe d'ordre stable (épreuves I, II, III, IV et V). – Dans cette épreuve, cinq tâches sont demandées à l'enfant. Aucune ne requiert de matériel. On demande tout d'abord à l'enfant de compter le plus loin possible. Ensuite, on lui demande de compter en tenant compte d'une borne supérieure (jusqu'à 9). La troisième tâche est de compter à partir d'une borne inférieure (à partir de 3). La quatrième tâche est de compter en tenant compte d'une borne inférieure et d'une borne supérieure (à partir de 5 jusqu'à 9. Enfin, on demande à l'enfant de compter à rebours à partir de 7.

Le principe de correspondance terme à terme (épreuves VIa et VIIa). – Cette épreuve comporte deux tâches. Pour la première, l'expérimentateur présente à l'enfant une rangée de 12 bouchons et lui demande de les compter. Pour la seconde tâche, les instructions sont les mêmes, mais la disposition des bouchons change. Ils sont alors dispersés sur la table.

Le principe cardinal (épreuves VIb et VIIb). – La question complète la tâche de correspondance terme à terme. Après que l'enfant ait compté les bouchons, on lui demande: «Combien de bouchons y a-t-il en tout?». Attention, cette question ne doit pas être considérée comme un révélateur de la maîtrise effective du concept de cardinal. Elle nous informe sur une capacité acquise antérieurement: l'usage du dernier mot-nombre pour désigner la valeur cardinale de la collection.

Le principe d'abstraction (épreuve VIII). – L'expérimentateur pose différents objets sur la table (N = 8). Ces objets varient en forme, en taille, en couleur, etc. On demande à l'enfant de compter le nombre d'objets qu'il y a sur la table.

Le principe de non-pertinence de l'ordre (épreuves VIc et VIIc). – Cette épreuve s'appuie sur les deux tâches de correspondance objet/mot-nombre réalisées par l'enfant lui-même. Après que l'enfant ait compté, on lui demande: «Est-ce que tu aurais aussi X (nombre donné par l'enfant) en commençant par celui-là? (On montre le bouchon opposé à celui par lequel il a commencé.)»

Les épreuves de cardinalité

Certaines des épreuves proposées dans ce dispositif reprennent telles quelles les épreuves d'auteurs précités (Frye *et al.*, 1989; Fuson, 1988; Sophian, 1987, 1991) alors que d'autres en sont des adaptations (difficultés supérieure ou inférieure); les dernières sont des compilations de plusieurs tâches. En tout, sept épreuves ont été élaborées.

Nous avons choisi le matériel le plus neutre possible afin de ne pas distraire l'enfant de la tâche principale. Brièvement, il s'agit de 13 bouchons mobiles, en plastique d'une seule couleur, des bouchons en plastique également d'une seule couleur, mais fixes, collés sur des cartons en nombre variable, 8 gobelets de couleur différente avec chacun leur capuchon et 10 objets variés utilisés comme matériel additionnel: allumette, crayon, feuille A4 de couleur, anneau, latte, livre de poche, gant de toilette, fourchette, gomme à effacer et bonbon.

Les trois premières épreuves ont été créées à partir des recherches menées par Frye *et al.* (1989) à propos de l'effet de la formulation des questions relatives à la cardinalité. Ces auteurs ont relevé trois types de questions à poser aux enfants: «Combien y a-t-il d'objets en tout?», «Y a-t-il X objets ici?», «S'il te plaît, donne-moi X objet?». La première épreuve est une traduction française de la troisième question. La deuxième et la troisième épreuve constituent une adaptation de la deuxième question alors que la première question renvoie directement à l'évaluation de la règle du dernier mot-nombre (cf. principe cardinal).

Produire le cardinal d'une collection d'objets identiques (épreuve I). – Dans cette épreuve, l'enfant a devant lui une série de 12 bouchons éparpillés; il lui est demandé d'en prendre 7 et de les poser sur une feuille de papier déposée devant lui.

Établir le cardinal d'une collection d'objets identiques (épreuve II). – Un carton est présenté à l'enfant sur lequel sont collés 11 bouchons d'une seule couleur éparpillés; il doit répondre à la question «Y a-t-il 11 bouchons?».

Établir le cardinal d'une collection d'objets hétérogènes (épreuve III). – L'expérimentateur dépose différents objets sur la table face à l'enfant (N = 10). Ces objets varient en fonction de la forme, de la couleur, de la nature, etc. L'enfant répond à la question «Y a-t-il 10 objets?».

Comparer deux collections d'objets (épreuve IV). – Pour cette épreuve, l'expérimentateur place devant l'enfant un carton avec 11 bouchons d'une même couleur, collés et éparpillés, et un autre carton avec 11 bouchons transparents, collés en ligne, verticalement, au milieu. Dans un premier temps, l'enfant doit dire s'il y a le même nombre de bouchons sur les deux feuilles et, dans un second temps, il est amené à justifier sa réponse. Pour cette épreuve, nous avons repris de Fuson (1991) le premier des trois grands types de comparaison qu'il est possible d'établir entre deux collections proposées. Ce type de comparaison est, en l'occurrence, la comparaison d'une collection transformée [Card (A) = Card (A')?]. Meljac (1979) utilise également une épreuve qui consiste à demander à l'enfant de comparer soit deux collections d'objets, l'une comprenant 2 jetons et l'autre comprenant 5 jetons, soit de comparer deux collections de 5 jetons chacune. Dans le cadre de cette recherche, nous avons repris la comparaison de deux collections d'un nombre équivalent d'objets, à savoir 11 jetons. Le choix s'est porté sur la quantité 11 dans la mesure où il s'agit d'un nombre moyen repris des différentes recherches analysées et que ce nombre semble être acquis par les enfants vers 5 ans (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995).

Construire une collection équivalente à une collection visible d'objets (épreuve V). – Les recherches de Sophian (1991) sur le développement des aspects cardinaux du comptage constituent la source principale de la cinquième épreuve dans laquelle il s'agit pour l'enfant de construire une collection équivalente à la collection présentée. Deux cartons sont posés l'un à côté de l'autre, face à l'enfant. Sur l'un des cartons, on place 9 bouchons éparpillés et l'autre carton est vierge. Douze bouchons mobiles sont posés sur la table. Tout d'abord, l'expérimentateur demande à l'enfant de mettre sur le carton vierge le même nombre de bouchons que sur l'autre carton. Il lui demande, ensuite, d'expliquer son raisonnement.

Construire une collection équivalente à une collection non visible (épreuve VI). – Cette épreuve, de même que la précédente, sont issues de la même recherche de Sophian (1991). La seule modification apportée est que l'enfant ne voit plus la collection de référence au moment de construire sa collection.

Déterminer le cardinal d'une collection non visible (épreuve VII). – Cette dernière épreuve reprend une autre expérience de Sophian (1988, 1991) qui permet d'évaluer la compréhension qu'ont les enfants de la signification cardinale de leur comptage.

L'expérimentateur dépose sur la table 8 gobelets avec leur couvercle et attire l'attention de l'enfant sur leur couleur différente. Ensuite, il enlève les couvercles de chaque gobelet et les pose sur ses genoux. Enfin, il pose deux questions à l'enfant: «Peux-tu me dire combien il y a de couvercles sur mes genoux?» et «Comment le sais-tu?».

Pour chacune de ces épreuves, une attention particulière est portée aux stratégies mises en œuvre par l'enfant pour résoudre les tâches qui lui sont demandées (exemple: le comptage).

Procédure

Les épreuves de comptage ont été administrées à quatre reprises aux mêmes enfants: en octobre 1993 et mars 1994 et en octobre 1994 et mars 1995, en même temps que les épreuves de cardinalité. Les sujets ont tous été testés de manière individuelle dans un local proche mais séparé de la classe. Le temps moyen de passation a été de 15 minutes par enfant. Durant l'examen, si l'enfant éprouvait des difficultés à répondre à une question, l'expérimentateur répétait une seule fois cette question et passait à la question suivante. Pour la cotation, l'expérimentateur disposait, en plus de la réponse du sujet pour chaque épreuve, d'une grille de cotation qualitative des stratégies utilisées par le sujet. Le même ordre de passation des épreuves a été retenu pour chacun des sujets pour chacune des quatre passations.

Résultats

Résultats relatifs au comptage

Les cinq premières épreuves servent à évaluer la maîtrise de l'ordre stable et permettent d'évaluer le niveau d'acquisition de la chaîne numérique. Les deux épreuves suivantes permettent d'évaluer le principe de correspondance terme à terme (VIa, VIIa), le principe cardinal (VIb, VIIb) et le principe de non-pertinence de l'ordre (VIc, VIIc). En effet, il est demandé à l'enfant de compter un ensemble de jetons (en ligne ou éparpillés). Ensuite, la question cardinale «Combien y en a-t-il en tout?» lui est posée puis, finalement, la question de la non-pertinence de l'ordre «En aurais-tu aussi X si tu avais commencé par ici?». L'épreuve VIII permet, quant à elle, d'évaluer le principe d'abstraction puisqu'une collection d'objets variés est présentée à l'enfant et il doit la compter.

Nous ne tenons pas compte des variables relatives à l'école d'origine et au sexe des enfants; nous nous attardons davantage aux pourcentages de réussites et à leur évolution au cours des quatre passations.

Dans un premier temps, nous présentons les résultats observés pour chacune des passations.

Tableau 1

Pourcentages de réussite des enfants aux huit épreuves de comptage pour les quatre passations

Nº d'épreuves	Épreuves	Pass. 1 N = 94	Pass. 2 N = 88	Pass. 3 N = 86	Pass. 4 N = 81
Épreuve I	compter le plus loin possible	95	100	100	100
Épreuve II	compter jusqu'à 9	79	87	97	97
Épreuve III	compter à partir de 3	30	54	74	71
Épreuve IV	compter de 5 à 9	28	48	74	87
Épreuve V	compter à rebours	13	26	60	83
Épreuve VIa	corr. terme à terme (jetons alignés)	73	81	89	92
Épreuve VIb	question cardinale (jetons alignés)	74	90	93	92
Épreuve VIc	non-pert. de l'ordre (jetons alignés)	43	29	75	92
Épreuve VIIa	corr. terme à terme (jetons éparpillés)	59	70	86	95
Épreuve VIIb	question cardinale (jetons alignés)	67	92	95	98
Épreuve VIIc	non-pert. de l'ordre (jetons alignés)	57	67	93	92
Épreuve VIII	abstraction	52	37	48	79

Lors de la première passation, l'épreuve la mieux réussie par les enfants de 5 ans est la première, où il leur est demandé de compter le plus loin possible. Cette épreuve est considérée comme correcte si l'enfant peut compter jusqu'à 5. Les enfants comptent jusqu'à 20 en moyenne (écart type = 11). Lors de la seconde passation, la première épreuve est réussie par tous les enfants. En moyenne, les enfants de fin de la troisième maternelle (5 1/2 ans) comptent jusqu'à 42 (écart type = 16). À la troisième passation, l'épreuve la mieux réussie est la première, comme à la passation précédente. En moyenne, les enfants du début de première année primaire (6 ans) comptent jusqu'à 42 (écart type = 34). Lors de la dernière passation, la première épreuve est toujours réussie par tous les enfants. En moyenne, en fin de première primaire (6 1/2 ans), les enfants comptent jusqu'à 57 (écart type = 27).

Les cinq premières épreuves évaluant le principe d'ordre stable évoluent de manière constante au cours des quatre passations même si trois de ces épreuves sont nettement moins bien réussies par les enfants (compter à partir d'une borne inférieure, compter à partir d'une borne inférieure jusqu'à une borne supérieure, compter à rebours). Le principe de correspondance terme à terme suit également une évolution constante avec un pourcentage allant de 73 à 92 % pour les jetons alignés et de 59 à 95 % pour les jetons éparpillés. Le principe cardinal suit la même progression avec un pourcentage allant de 74 à 92 % pour les jetons alignés et de 67 à 98 % pour les jetons éparpillés. Le principe de non-pertinence de l'ordre est également en progression au cours des quatre passations. Il va de 43 à 92 % pour les jetons alignés et de 57 à 92 % pour les jetons éparpillés avec un pourcentage plus faible à la seconde passation pour la collection d'objets alignés. Le principe d'abstraction suit une évolution moins poussée que les quatre autres principes avec une régression à la deuxième et à la troisième passation. Le pourcentage passe de 52 à 37 %, puis à 48 % pour terminer à 79 %.

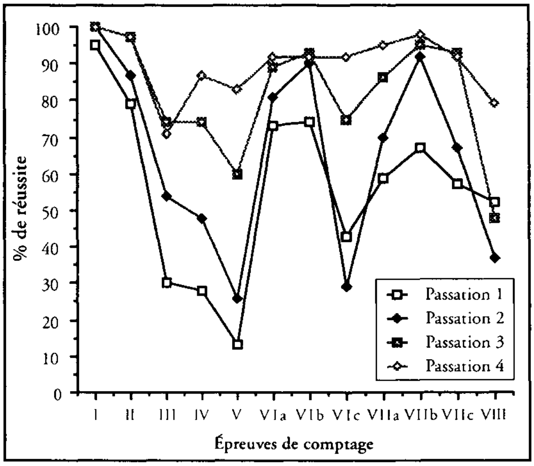

Figure 2 – Illustration de la réussite des enfants aux huit épreuves de comptage pour les quatre passations

Tableau 2

Calcul du chi carré pour les épreuves de comptage

Nº d'épreuves	Valeur du chi carré	Probabilité
Épreuve I	100 % de réussite à une des passations	/
Épreuve II	borne supérieure (1,81) = 10,286	0,001
Épreuve III	borne inférieure (1,81) = 18,692	0,000
Épreuve IV	bornes sup. et inf. (1,81) = 38,095	0,000
Épreuve V	à rebours (1,81) = 44,080	0,000
Épreuve VIa	corr. terme à terme (1,81) = 11,840	0,001
Épreuve VIb	100 % de réussite à une des passations	/
Épreuve VIc	non-pert. ordre (1,81) = 35,372	0,000
Épreuve VIa	corr. terme à terme (1,81) = 22,091	0,000
Épreuve VIIb	cardinalité (1,81) = 24,000	0,000
Épreuve VIIc	non-pert. ordre (1,81) = 22,091	0,000
Épreuve VIII	abstraction (1,81) = 20,000	0,000

Dans un second temps, nous voulons vérifier si les changements observés lors de ces quatre passations sont significativement différents. Pour cela, nous avons calculé le chi-carré de Mac Némar entre chaque passation et globalement entre la première et la dernière passation, c'est-à-dire entre le début de la troisième maternelle et la fin de la première primaire. Ce test est utilisé dans la mesure où les échantillons sont jumelés, les mesures «avant et après» constituent les paires de données et nous ne faisons pas d'hypothèses sur la distribution des résultats. Dans cet article, nous ne présentons que la dernière analyse.

Nous constatons que, pour toutes les épreuves et donc pour tous les principes du comptage, les changements observés entre la première et la quatrième passation sont très significatifs; le chi carré observé donne une probabilité nettement inférieure à 0,05. Nous pouvons donc dire que toutes les progressions observées suivent une évolution statistiquement significative depuis la première passation jusqu'à la dernière.

Résultats relatifs à la cardinalité

Dans un premier temps, nous présentons à nouveau les résultats observés pour chacune des passations.

Tableau 3

Pourcentages de réussite des enfants aux sept épreuves de cardinalité pour les quatre passations

N° d'épreuves	Épreuves	Pass. 1 N = 75	Pass. 2 N = 70	Pass. 3 N = 75	Pass. 4 N = 69
Épreuve I	cardinal d'objets identiques	73	91	100	100
Épreuve II	cardinal d'objets identiques	69	75	89	78
Épreuve III	cardinal d'objets variés	58	57	74	71
Épreuve IV	comparaison de deux collections	25	50	75	76
Épreuve V	construction d'une collection équivalente à une collection visible	50	68	87	78
Épreuve VI	construction d'une collection équivalente à une collection non visible	40	46	71	70
Épreuve VII	numérosité d'une collection cachée	56	70	91	100

Ce tableau fait apparaître un pourcentage de réussite fort hétérogène entre les différentes épreuves. Globalement, nous pouvons relever que les performances des enfants ont évolué progressivement depuis le début de la troisième maternelle et la fin de la première primaire.

Les trois premières épreuves qui font référence à la reconnaissance du cardinal d'une seule collection sont globalement en progression au cours des quatre passations avec une régression pour la deuxième épreuve à la dernière passation. Les trois épreuves suivantes, qui portent sur les relations entre deux collections, évoluent également au cours des quatre passations, mais pas de manière constante. L'épreuve IV est faiblement réussie à la première passation (25 %); son taux de réussite s'améliore nettement à la deuxième passation (50 %) et encore à la troisième passation (75 %)

et se maintient à la dernière passation (76 %). Quant à l'épreuve V, sa progression montre plus d'irrégularités. Réussie par la moitié des enfants au début de la troisième maternelle, son pourcentage de réussite s'améliore et passe à 68 % à la deuxième passation et à 87 % à la troisième, mais chute en fin de première primaire à 78 %. L'amélioration des performances de l'épreuve VI se marque essentiellement entre la fin de la troisième maternelle et le début de la première primaire (46 à 71 %). L'épreuve VII, centrée davantage sur le lien entre le comptage et la cardinalité, est en constante progression passant d'un pourcentage de réussite de 56 %, au départ, pour atteindre une réussite totale en fin de première primaire.

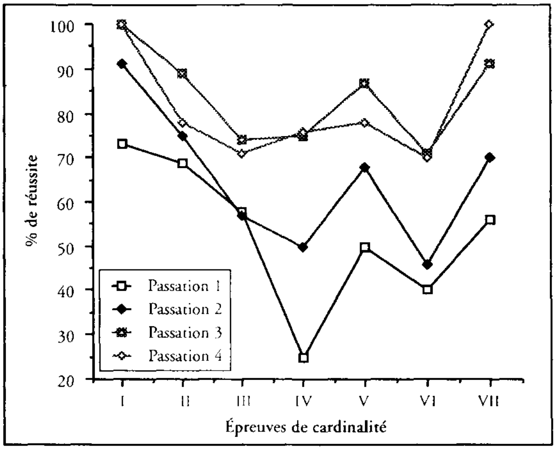

Figure 3 – Illustration de la réussite des enfants aux sept épreuves de cardinalité pour les quatre passations

Sur le plan des stratégies, nous pouvons relever que celle qui est la plus souvent utilisée par les enfants pour résoudre les épreuves de cardinalité, dès le début de troisième maternelle, est le comptage.

Les plus jeunes enfants appliquent donc les mêmes stratégies que leurs aînés, mais commettent des erreurs au sein même de la procédure de comptage (surcomptage, omission, correspondance terme à terme mal assurée entre les objets et le non-respect de la suite numérique, etc.). Un lien entre la maîtrise du comptage et de la cardinalité est donc attendu. En effet, dans certaines épreuves de cardinalité, le comptage est une des stratégies possibles parmi d'autres. Par exemple, pour la comparaison de deux collections visibles (épreuve IV) ou pour la construction d'une collection équivalente à une collection présentée et maintenue visible (épreuve V), la correspondance terme à terme peut être une stratégie qui permet d'obtenir un résultat correct. Toutefois, si le nombre d'objets devient trop important, les risques d'erreurs se multiplient. Par ailleurs, pour résoudre l'ensemble des épreuves liées à la reconnaissance du cardinal d'une collection unique (épreuves I, II, III et VII) et l'épreuve relative à la construction d'une collection équivalente à une autre qui ne reste pas visible à l'enfant (épreuve VI), le comptage reste la seule stratégie efficace. La maîtrise du comptage n'est cependant pas suffisante mais nécessaire à la réussite de l'épreuve. Une analyse approfondie des stratégies mises en place par les enfants fera l'objet d'un autre article.

Dans un second temps, nous voulons vérifier si les changements observés lors de ces quatre passations sont significativement différents. Pour déterminer cela, nous avons, comme pour les épreuves de comptage, appliqué le test de Mac Némar. À nouveau, nous ne présentons les résultats qu'entre la première passation et la dernière.

Tableau 4

Calcul du chi carré pour les épreuves de cardinalité

N° d'épreuves	Valeur du chi carré	Probabilités
Épreuve I	100% de réussite à une des passations	/
Épreuve II	chi carré (1,68) = 8,167	0,000
Épreuve III	chi carré (1,68) = 8,000	0,000
Épreuve IV	chi carré (1,68) = 38,348	0,000
Épreuve V	chi carré (1,68) = 20,161	0,000
Épreuve VI	chi carré (1,68) = 23,059	0,000
Épreuve VII	100 % de réussite à une des passations	/

L'évolution du pourcentage des réussites observé entre la première et la quatrième passation est très significative pour l'ensemble des épreuves de cardinalité: toutes les progressions observées chez les enfants suivent une évolution statistiquement significative depuis le début de la troisième maternelle (5 ans) et la fin de la première primaire (6 1/2 ans).

Discussion générale

En ce qui concerne les épreuves de comptage, les résultats montrent que l'acquisition des cinq principes est également un processus lent et progressif. Nous allons passer en revue les différents principes évalués dans les épreuves de comptage.

Discussion relative à la maîtrise du comptage

— Principe d'ordre stable

Une analyse plus en détails de la maîtrise de la chaîne numérique indique qu'environ la moitié des enfants de fin de troisième maternelle (5 1/2 ans) ont véritablement atteint le niveau de la chaîne sécable, définie par Fuson (1988, 1991):

- le respect de la seule borne supérieure est acquis par 87 % des enfants;
- le respect de la borne inférieure est acquis par 54 %;
- le respect des bornes inférieure et supérieure est acquis par 48 %;
- le comptage à rebours est moins bien maîtrisé par les enfants (26 %), mais cette habileté est peu exercée en troisième maternelle.

En fin de première primaire, les compétences des enfants se sont améliorées. «Dès qu'un apprentissage plus systématique est mis en place, les performances grimpent rapidement» (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995).

En fin de première primaire, le niveau de la chaîne sécable est encore mieux maîtrisé:

- le respect de la seule borne supérieure est acquis par 97 % des enfants;
- le respect de la borne inférieure est acquis par 71 %;
- le respect des bornes inférieure et supérieure est acquis par 87 %;
- le comptage à rebours par 83 %. Donc, lorsque cette habileté est exercée, les performances sont meilleures.

— Principe de correspondance terme à terme

En fin de troisième maternelle, 81 % des enfants de notre échantillon sont capables de faire correspondre un seul mot-nombre à chaque élément de l'ensemble à dénombrer pour un ensemble de 12 éléments alignés et 70 % pour des éléments éparpillés. L'hypothèse de difficulté des éléments éparpillés par rapport aux éléments alignés se vérifie. Ces résultats confirment ceux obtenus par Fuson (1988) et par Grégoire et Van Nieuwenhoven (1995).

En fin de première primaire, 92 % des enfants sont capables de réaliser une bijection correcte pour un ensemble de 12 éléments alignés et 95 % des enfants en sont capables pour une collection de 11 éléments éparpillés. Nous émettons l'hypothèse que, en fin de première primaire, les enfants sont plus attentifs lorsque les éléments présentés sont disposés de manière irrégulière.

— Principe cardinal

La question cardinale «Combien y en a-t-il en tout?» est posée immédiatement après la tâche de comptage. Nous avons considéré comme correctes les réponses données après recomptage de la collection. En fin de troisième maternelle, 10 % des enfants recomptent lorsque les jetons sont alignés; 4 %, lorsque ceux-ci sont éparpillés. En fin de première primaire, 1 % recompte lorsque les jetons sont alignés et 7 %, lorsqu'ils sont éparpillés. En fin de troisième maternelle, 90 % des enfants répondent correctement à la question «Combien y en a-t-il en tout?» lorsque les jetons sont alignés et 92 % y répondent bien lorsque les jetons sont éparpillés. En fin de première primaire, 92 % des enfants répondent correctement à la question «Combien y en a-t-il en tout?» lorsque les jetons sont alignés et 98 %, lorsqu'ils sont éparpillés. Nos résultats ne sont pas tout à fait identiques à ceux obtenus par Fuson (1988). Celui-ci avait observé alors que 100 % des enfants de 5 ans réussissent le même type d'épreuve pour des collections allant de 7 à 19 jetons. Nos résultats sont bons, mais un peu plus faibles. Nous avançons l'hypothèse qu'«une partie de nos sujets se trouvent à ce moment en réaménagement conceptuel» (Grégoire et Van Nieuwenhoven, 1995). En fait, la question qui leur est posée par l'examinateur leur pose problème, mais ils ne sont pas encore assez armés conceptuellement pour y répondre sans hésiter. En fin de première primaire, les élèves ont des connaissances plus assurées et commettent moins d'erreurs.

— Principe d'abstraction

La maîtrise de ce principe pose problème à un nombre relativement important d'enfants en fin de troisième maternelle. Seuls 37 % des enfants réussissent l'épreuve. Les autres ne parviennent pas à compter un ensemble assez petit (N = 8) d'objets hétérogènes. En fin de première primaire, 79 % des enfants répondent correctement à la question, mais un cinquième des enfants ont toujours des difficultés à se représenter mentalement et, partant, à compter une série d'objets hétérogènes. Ce principe d'abstraction est acquis tardivement. En effet, nos résultats montrent que les enfants, encore au début de la première année primaire, ont des difficultés à considérer tous les éléments d'un ensemble comme des unités équivalentes. Ils n'arrivent pas à faire abstraction des qualités sensibles des objets. Lorsqu'un objet possède certaines qualités qui le distinguent trop des autres éléments de l'ensemble auquel il appartient, l'enfant répugne parfois à compter (*Idem*).

— Principe de non-pertinence de l'ordre

La maîtrise de ce principe est faible en fin de troisième maternelle: 29 %, lorsque les jetons sont alignés et 67 %, lorsque ceux-ci sont éparpillés. Les enfants sont-ils plus attentifs lorsque la configuration présentée paraît plus compliquée ou est-ce le fait que la question posée à partir d'une collection hétérogène est toujours posée après celle d'une collection homogène? En fin de première primaire, les résultats sont considérablement meilleurs: 92 % de réussite, que les jetons soient alignés ou éparpillés. «Cette différence s'explique vraisemblablement par la généralisation de l'acquisition de la conservation du nombre chez les enfants de première primaire» (*Ibid.*, p. 73).

Discussion relative à la maîtrise de la cardinalité

En ce qui concerne les épreuves de cardinalité, nous remarquons, tout comme le disait Fuson (1988), que l'acquisition de la cardinalité est lente et progressive. Nous allons maintenant reprendre l'analyse de nos différentes épreuves et discuter les résultats obtenus.

Pour les trois premières épreuves construites partiellement à partir de celles de Frye *et al.* (1989), nos résultats sont quelque peu différents des leurs. Pour Frye, la question canonique «Combien?» est plus facile, car il suffit pour l'enfant de répéter le dernier mot compté. Ensuite viendrait la question «Y a-t-il X objets?», réussie modérément et, finalement, la question «Peux-tu mettre X objets?» qui serait nettement moins réussie. Or, nous obtenons des résultats légèrement meilleurs pour cette question (même réussie à 100 % à la dernière passation) que pour la question canonique (toutefois réussie par plus de 90 % des sujets à partir de la deuxième passation). Les épreuves II et III, où la question «Y a-t-il X objets?» est posée à l'enfant, restent toujours en troisième position dans la hiérarchie des réussites de l'enfant pour ces questions. Les résultats encore inférieurs observés pour la troisième épreuve par rapport à la deuxième peuvent s'expliquer par l'hétérogénéité du matériel (cf. principe d'abstraction). Le nombre d'objets présentés à l'enfant (N = 7, 10, 11 et 12), supérieur à la plupart des collections proposées par Frye *et al.* (1989) pourrait également influencer la réussite. Les légères différences observées peuvent en outre s'expliquer par la traduction approximative des consignes proposées par Frye *et al.* (1989). La réussite supérieure enregistrée pour la question «Peux-tu mettre X objets?» est étonnante dans la mesure où nous aurions pu penser, comme Baroody (1987), que le fait d'isoler un ensemble d'objets de l'ensemble d'une collection serait plus difficile que de simplement compter une collection présentée («Y a t-il X objets?») et répondre par oui ou par non. Les épreuves I, II et III requièrent de la part de l'enfant de comparer le nombre présenté par l'expérimentateur avec la numérosité de la collection présentée. Une meilleure compréhension de la cardinalité est donc nécessaire. Frye *et al.* (1989) ont également constaté que le fait de poser la question relative à la cardinalité, avant le comptage de l'enfant, diminue ses performances et rend la tâche plus compliquée dans la mesure où il doit se souvenir, pendant qu'il compte, de la raison de son comptage. C'est plus difficile parce que «cela requiert, de la part des enfants, des compétences procédurales et d'utilisation plus importantes» (Frye *et al.*, 1989). Gelman et Meck (1986), quant à elles défendent l'avis contraire selon lequel le fait de poser la question après est plus difficile parce que l'enfant commence à résoudre la tâche avec un but de comptage et, soudainement, on lui demande de répondre à une question relative à la cardinalité. Le débat reste ouvert.

À l'épreuve IV, épreuve similaire à celle de Sophian (1987, 1988), nous demandions aux enfants de comparer deux collections présentées selon des configurations spatiales différentes. Contrairement à celles de Sophian, nos collections n'étaient jamais appariées et le nombre d'objets était supérieur à 10. La comparaison des deux collections était donc difficile sans l'utilisation du comptage. Nous confirmons les résultats obtenus par Sophian selon lesquels les enfants ont des difficultés à comparer les collections non appariées, surtout en début de troisième maternelle. Très peu utilisent le comptage comme stratégie (moins de 50 % des enfants). En fin de première primaire, cette épreuve est mieux réussie (76 %), car 89 % des enfants utilisent le comptage. Les résultats assez faibles, obtenus par les enfants de maternelle, peuvent s'expliquer partiellement du fait qu'ils n'utilisent pas le comptage, mais aussi parce que, bien qu'ils aient fait le choix de la bonne stratégie, ils ne répondent pas correctement à la question posée. Ces résultats peuvent être dus en partie à des erreurs de comptage (omission, surcomptage, mauvaise correspondance terme à terme, etc.), mais ils reflètent aussi une mauvaise compréhension du rôle que joue le comptage pour résoudre un tel problème. C'est ainsi que certains enfants, plus jeunes, ne comptent qu'une collection ou encore comptent les deux collections, mais produisent une réponse sans correspondance avec les résultats de leur comptage.

Les épreuves V et VI sont les moins bien réussies tout au long de la passation. Sophian (1987) avait fait passer le même type d'épreuves. Tout comme nous, elle remarquait que, au cours des épreuves avec des collections non appariées, les plus jeunes enfants ont très rarement compté les éléments de l'une ou de l'autre collection. Or, toute stratégie simple de correspondance terme à terme était soit exclue (épreuve VI), soit rendue difficile par le nombre important d'objets (épreuve V). En effet, pour la sixième épreuve, la stratégie de correspondance terme à terme ne peut être utilisée puisque la collection témoin est cachée. L'enfant doit donc utiliser le comptage pour réussir l'épreuve. Cette épreuve est peu réussie au début de la troisième maternelle (40 %) et mieux en fin de première primaire (70 %). Ce faible résultat pourrait s'expliquer d'une part par le fait que certains enfants de maternelle essaient de retenir la place des bouchons de la première collection et place les bouchons de la seconde collection selon la configuration spatiale dont ils se souviennent. Ceci, bien entendu, donne lieu à beaucoup d'erreurs. D'autre part, les jeunes enfants utilisent la bonne stratégie, le comptage, mais ne le maîtrisent pas correctement. Quant aux plus âgés, leurs procédures de comptage s'améliorent nettement et permettent davantage de réponses correctes.

Pour la cinquième épreuve pour laquelle les résultats sont meilleurs, même s'ils restent faibles (50 % au début de la troisième maternelle), les enfants peuvent utiliser la correspondance terme à terme pour construire la seconde collection équivalente à celle qu'ils ont sous les yeux; mais beaucoup commettent des erreurs dans l'utilisation de cette stratégie. Globalement, par la suite, les enfants utilisent de plus en plus le comptage au détriment de la correspondance terme à terme (36 % de correspondance terme à terme et 42 % de comptage à la première passation; 1 % de correspondance terme à terme et 89 % de comptage à la quatrième passation) jusqu'à ne plus utiliser que le comptage en commettant toutefois encore des erreurs (78 % de réussite à la quatrième passation).

L'épreuve VII est très bien réussie en fin de première primaire (100 % de réussite), mais elle reste en quatrième position pendant les trois premières passations. Seul le comptage permet de réussir cette épreuve puisque l'expérimentateur cache les capuchons au fur et à mesure qu'il les enlève. L'enfant doit donc maîtriser le principe de correspondance terme à terme selon lequel à chaque élément compté correspond un et un seul mot-nombre afin de comprendre qu'à chaque gobelet correspond un et un seul couvercle enlevé. De cette façon, il pourra répondre à la question cardinale «Combien?». Cette épreuve constitue une évaluation pertinente de la compréhension de la signification cardinale du comptage. En effet, il doit réaliser des inférences, par le biais du comptage, quant au nombre d'objets d'une collection présentée en correspondance terme à terme à une autre collection qu'il doit compter. Au départ, les enfants de troisième maternelle ne pensent pas à utiliser l'information recueillie en comptant les éléments d'une collection pour en inférer le nombre d'éléments d'une autre collection placée en correspondance terme à terme. Or, dès le début de la première primaire, les performances à cette épreuve s'améliorent nettement pour culminer à la fin de la première primaire. Ces résultats, en accord avec ceux obtenus par Sophian, suggèrent que «la cardinalité, du moins ce qui, dans ce principe, régit les relations entre deux collections, est une conquête relativement tardive dans le développement du comptage» (Sophian, 1991, p. 45).

Le comptage et la cardinalité évoluent au fil des apprentissages scolaires et de l'imitation parentale (Fuson, 1988). Tous ces auteurs (Frye *et al.*, 1989; Fuson, 1988; Sophian, 1987, 1988, 1991; Wynn, 1990) s'entendent sur un point: les enfants n'ont pas d'emblée une compréhension de la relation entre la réponse du dernier mot-nombre énoncé et la numérosité. Au départ, beaucoup d'enfants répondent sans hésiter à la question cardinale «Combien y en a-t-il en tout?» sans avoir compté correctement l'ensemble présenté. En fait, c'est comme s'ils avaient construit une «règle du dernier mot-nombre» (Fuson, 1988).

Ce n'est que par la suite que, devant une situation de comptage, les enfants recourent à une reconstruction mentale de la situation qu'ils ne considèrent plus comme une situation de comptage d'entités séparées (dans laquelle chaque nombre énoncé se réfère à une entité), mais bien comme une situation cardinale dans laquelle les mots se réfèrent à toutes les entités. À ce niveau, la référence finale du mot-nombre donné comme réponse à la question «Combien en tout?» est une référence cardinale (qui renvoie à la quantité de la collection comme un tout). Ils opèrent donc une transition depuis la signification du comptage quand le mot est dit en comptant vers la signification cardinale de ce mot quand il est donné comme la réponse à la question «Combien en tout?» (Fuson, 1988). Ce passage nécessite que l'enfant regroupe, sur un plan conceptuel, tous les éléments comptés de telle façon que la référence cardinale se rapporte à tous les éléments. Ce regroupement conceptuel est appelé «intégration cardinale» selon la suggestion de Steffe et Cobb (1988). Ceci entraîne une compréhension de l'équivalence numérique et, dans certaines situations, additions et soustractions deviennent réalisables (Fuson, 1991).

Implications pédagogiques

L'étude de la relation entre le développement des concepts mathématiques et l'acquisition des procédures numériques se révèle essentielle, tant pour la théorie du développement cognitif que pour l'enseignement (Sophian, 1991). Sur le plan théorique, un lien étroit a pu être établi entre le comptage et la cardinalité. Aborder ces concepts séparément serait absurde. On n'apprendra pas le nombre pour lui-même, mais pour résoudre un problème, une situation de la vie quotidienne. Une autre implication importante à déduire de nos résultats est que tous ces apprentissages sont des processus de longue haleine; il ne faut donc pas les considérer trop rapidement comme acquis.

La question des relations entre les aspects procéduraux et conceptuels du développement des mathématiques est aussi importante sur le plan de la pratique que sur celui de la théorie. Les constats répétés de déficits conceptuels, lors de l'apprentissage des mathématiques, ont conduit les enseignants à reconnaître que l'école doit enseigner bien davantage que de simples règles de calcul. Il n'est pas acceptable de constater que les enfants auxquels on a appris comment effectuer les quatre opérations de base se montrent incapables d'appliquer ces procédures à la résolution de problèmes, exception faite des plus élémentaires (Cockcroft, 1982). Les enfants ont besoin d'apprendre à la fois les techniques de calcul et les concepts qui y sont rattachés (Hugues, 1986; Resnick, 1989). Les enseignants peuvent favoriser l'accès au sens chez les enfants en leur donnant l'occasion de valider de nouvelles stratégies en les comparant avec d'autres déjà bien assimilées.

> Les convergences entre les résultats d'une procédure nouvelle et ceux d'une procédure plus familière sont déterminants pour la construction des significations (Sophian, 1991, p. 57).

Au départ, les jeunes enfants utilisent le comptage dans un contexte qui n'est pas nécessairement numérique. Progressivement, ils vont découvrir que le comptage revêt une signification cardinale importante. Cet outil permet aux enfants de résoudre des problèmes, de quantifier le réel. C'est ainsi qu'il choisira le comptage comme stratégie pour comparer des collections, pour évaluer la numérosité d'une collection donnée, etc. Lorsque le comptage a acquis une signification cardinale, les enfants vont pouvoir l'utiliser pour aborder d'autres apprentissages mathématiques plus complexes, résoudre des problèmes additifs, par exemple.

Fréquemment, le comptage est enseigné uniquement comme une procédure, un algorithme à appliquer sans faire référence au but que sous-tend l'utilisation d'une telle stratégie. Le risque est grand que les enfants apprennent ces procédures sans comprendre ni la raison de leur utilisation ni le résultat auquel elles mènent. Ces enfants qui apprennent sans comprendre la signification de ce qu'ils font vont commettre des erreurs procédurales et auront des difficultés majeures à généraliser l'utilisation de leur connaissance à de nouvelles situations. L'analyse des protocoles de résolution de ces mêmes enfants révèlent des erreurs absurdes du point de vue conceptuel (Jonnaert, 1994).

Les enfants peuvent être motivés par l'apprentissage d'une nouvelle procédure pour elle-même, mais si l'objectif est qu'ils mettent à profit son utilisation pour résoudre des problèmes ultérieurs, ils doivent y trouver un sens. Dans la mesure où ils cherchent à rattacher ce qui est nouveau à ce qu'ils connaissent déjà, il faut être attentif aux connexions qui existent entre la nouvelle procédure enseignée et le bagage conceptuel déjà maîtrisé. C'est pourquoi «un enseignement délibéré et planifié s'avère nécessaire pour que les nouvelles procédures ne se détachent pas du monde familier des nombres et des collections où les enfants peuvent fonctionner comme "faiseurs de sens"» (Sophian, 1991, p. 54). Cela pour éviter que les mathématiques soient, dès le début de la scolarité, considérées comme un monde à part, abstrait, sans lien avec la réalité et qui nécessite uniquement une application rigoureuse de symboles et de procédures. Un tel enseignement implique, de la part des enseignants, de ne pas se centrer uniquement sur les concepts et les *skills*, mais bien d'aider les enfants à comprendre comment ces concepts peuvent être appliqués à des situations pratiques tant familières que non familières.

Plus d'attention devrait être consacrée à la résolution de problèmes, non pas comme une matière à enseigner pour elle-même, mais davantage comme une finalité de l'enseignement primaire. Jonnaert (1994) parle même d'une école du problème. «Les mathématiques ne sont utiles que si elles peuvent s'appliquer à une situation particulière, et c'est à la capacité d'appliquer les mathématiques à une variété de situations que nous donnons le nom de "résolution de problème"» (Hugues, 1986, p. 249).

Abstract – Counting is an activity which is directed to an objective clearly related to the concept of cardinality. These two concepts are defined in relation to the works of Gelman and Gallistel (1978) and to Sophian (1987, 1988, 1991). The data for this study was collected from 94 children aged 5 to 8 years using tests of counting and comprehension of cardinality. The results show that the acquisition of principles related to these concepts is a slow and progressive process.

Resumen – Contar es una actividad dirigida hacia una meta estrechamente ligada al concepto de cardinalidad. Los conceptos de contar y de cardinalidad son definidos respectivamente en relación con los trabajos de Gelman y Gallistel (1978) y de Sophian (1987, 1988, 1991). Los datos obtenidos de 94 niños de 5 a 8 años de edad sobre cuentas y cardinales muestran que la adquisición de principios de contes y cardinalidad es un proceso lento y progresivo.

Zusammenfassung – Zählen geht immer auf etwas hinaus, das mit dem Begriff der Grundzahl eng verbunden ist. Die Begriffe des Zählens und der Grundzahl werden hier unter Berufung auf die Arbeiten von Gelman und Gallistel (1978), bzw. die von Sophian (1987, 1988,

1991) definiert. Die Daten wurden gesammelt, indem 94 fünf- bis achtjährige Kinder einer Zähl- und Grundzahlprüfung unterzogen wurden. Die Ergebnisse zeigen, daß das Erlernen der Prinzipien des Zählens und der Grundzahl ein langsamer und allmählicher Prozeß ist.

RÉFÉRENCES

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking.* New York, NY/Londres: Columbian University Press.

Baroody, A. J. (1991). Procédures et principes de comptage: leur développement avant l'école. *In* J. Bideaud, C. Meljac et J.-P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 133-158). Lille: Presses universitaires de Lille.

Brissiaud, D. R. (1989). *Comment les enfants apprennent à calculer – Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles.* Paris: Retz.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts: Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools.* Londres: HMSO.

Fischer, J.-P. (1992). *Connaissances procédurales et déclaratives dans les apprentissages numériques élémentaires.* Nancy: Presses universitaires de Nancy.

Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas C. et Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development, 60,* 1158-1171.

Fuson, K. (1988). Children's counting and concepts of number. New York, NY: Springer-Verlag.

Fuson, K. (1991). Relation entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. *In* J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 158-182). Lille: Presses universitaires de Lille.

Fuson, K. et Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. *In* H. P. Ginsburz (dir.), *The development of mathematical thinking* (p. 49-107). New York, NY: Academic Press.

Fuson, K., Pergament, G. G. et Lyons, B. G. (1985). Children's conformity to the cardinality rule as function of set size and counting. *Child Development, 56,* 1429-1436.

Gelman, R. (1982). Accessing one-to-one correspondence: Still another paper about conservation. *British Journal of Psychology, 73,* 209-220.

Gelman, R. et Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gelman, R. et Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principle before skill. *Cognition, 13,* 343-359.

Gelman, R. et Meck, E. (1986). The notion of principle – The case of counting. *In* J. Hiebert (dir.), *Conceptual and procedural knowledge – The case of mathematics* (p. 29-57). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Gelman, R. et Meck, E. (1991). Premiers principes et conception du nombre. *In* J. Bideaud, C. Meljac et J.-P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 211-234). Lille: Presses universitaires de Lille.

Gréco, P. et Morf, A. (1962). Structures numériques élémentaires. Paris: Presses universitaires de France.

Grégoire, J. et Van Nieuwenhoven, C. (1994). Le comptage en troisième maternelle et en première primaire: vers un outil d'évaluation diagnostique. *Pédagogies, 7,* 67-89.

Grégoire, J. et Van Nieuwenhoven, C. (1995). Counting at nursery school and at primary school: Toward an instrument for diagnostic assessment. *European Journal of Psychology of Education, X*(1), 61-75.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics.* Oxford: Basil Blackwell.

Jonnaert, P. (1994). *L'enfant -géomètre.* Bruxelles: Éditions Plantyn.

Klahr, D. (1984). Transition processes in quantitative development. *In* R. Sternberg (dir.), *Mechanisms of cognitive development* (p.112-125). San Fransisco, CA: Freeman.

Meljac, C. (1979). *Décrire, agir et compter.* Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J. et Széminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant.* Neuchâtel/Paris: Delachaux et Niestlé.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44,* 162-169.

Sophian, C. (1987). Early developments in children's use of counting to solve quantitative problems. *Cognition and Instruction, 4,* 61-90.

Sophian, C. (1988). Limitations in children's knowledge about counting – Using counting to compare two sets. *Developmental Psychology, 24,* 634-640.

Sophian, C. (1991). Le nombre et sa genèse avant l'école primaire – Comment s'en inspirer pour enseigner les mathématiques. *In* J. Bideaud, C. Meljac et J-P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 35-58). Lille: Presses universitaires de Lille.

Steffe, J. P. et Lobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York, NY: Springer Verlag.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 46,* 155-193.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology, 24,* 220-251.